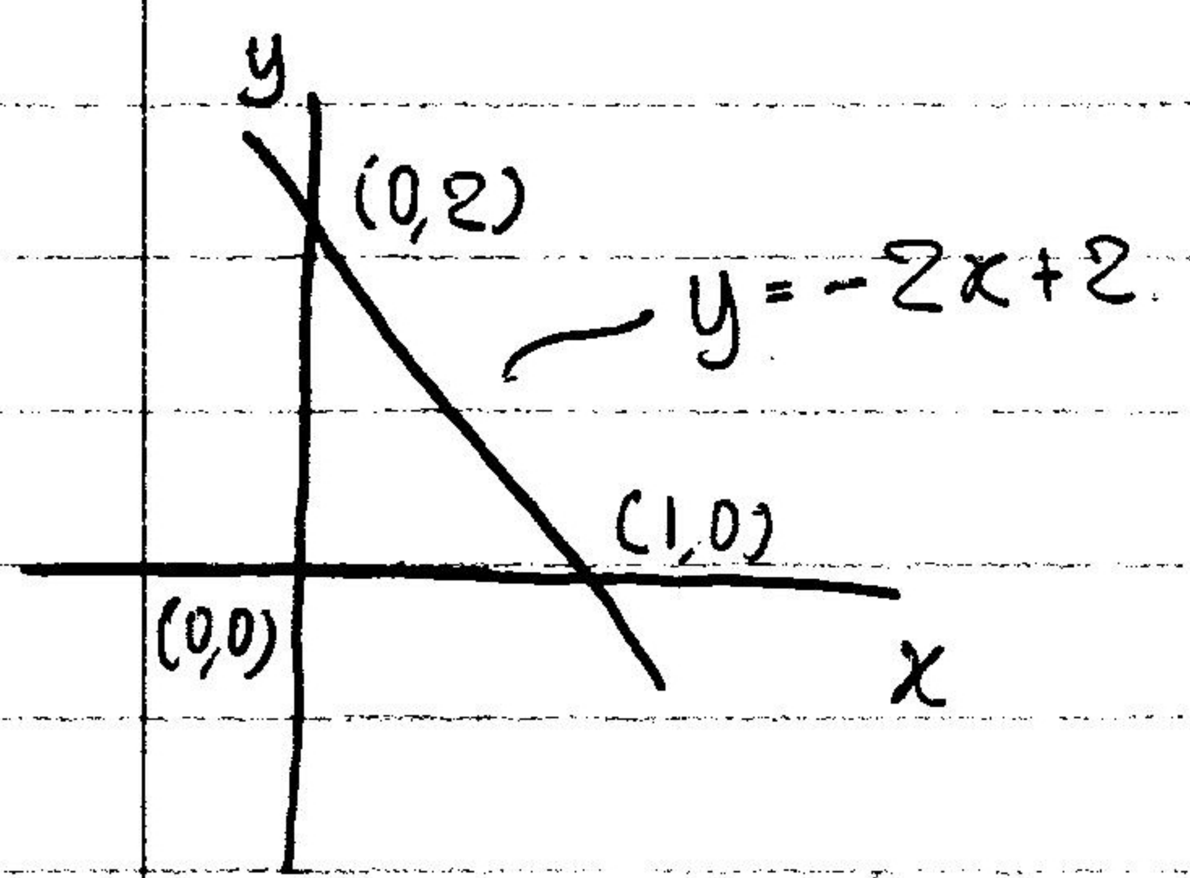
Παραδείγματα.

Να βρεθεί το κ.μ του λεπτού και επίπεδου σώματος τριγωνικού σχήματος με κορυφές (0,0), (1,0), (0,2), με πυκνότητα μάζας $\rho(x,y) = 1+3x+y$.



$$\bar{x} = \frac{M_x}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{m}$$

$$m = \iint \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} (1+3x+y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(y + 3yx + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{-2x+2}$$

$$= \frac{8}{3} \ \mu.\mu.$$

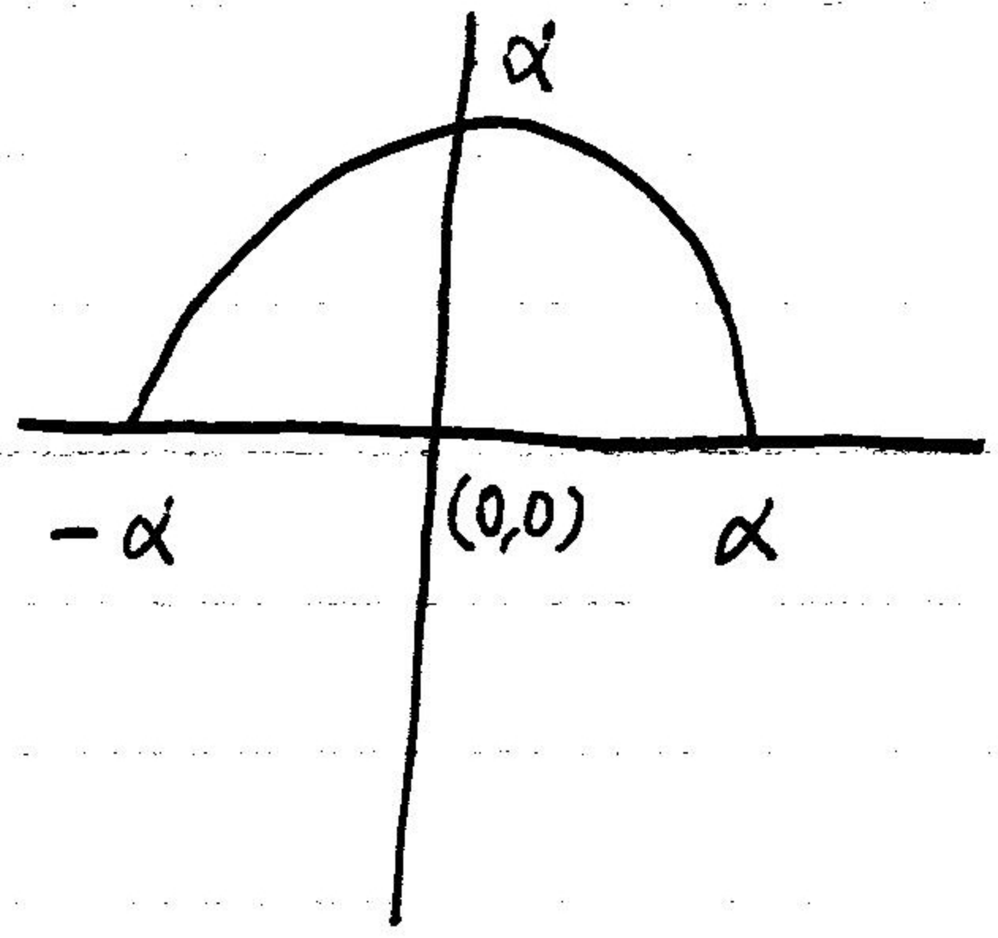
$$M_x = \iint y \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} y(1+3x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2} x y^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{-2x+2} dx = \frac{11}{3}$$

$$M_y = \iint x \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{-2x+2} x(1+3x+y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(xy + 3x\,y + \frac{x}{2} y^2 \right)_0^{-2x+2} dx = 1$$

, άρα $\bar{x} = \dfrac{11}{8}$, $\bar{y} = \dfrac{3}{8}$.



Η πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από το κέντρο.

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{άρα} \quad \rho(x,y)=\lambda\sqrt{x^2+y^2}$$

$$m=\iint \rho\, dA=\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{0}^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} \lambda\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Αλλάζω σε πολικές συν/νες $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$$m=\int_0^{\pi}\int_0^{\alpha}\lambda\underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}_{r}\underbrace{dA}_{r\,dr\,d\theta}$$

$$=\lambda\int_0^{\pi}\int_0^{\alpha} r^2\, dr\, d\theta=\lambda\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{\alpha} r^2\, dr$$

$$=\lambda\pi\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\alpha}=\frac{\alpha^3}{3}\lambda\pi \ \mu.\mu.$$

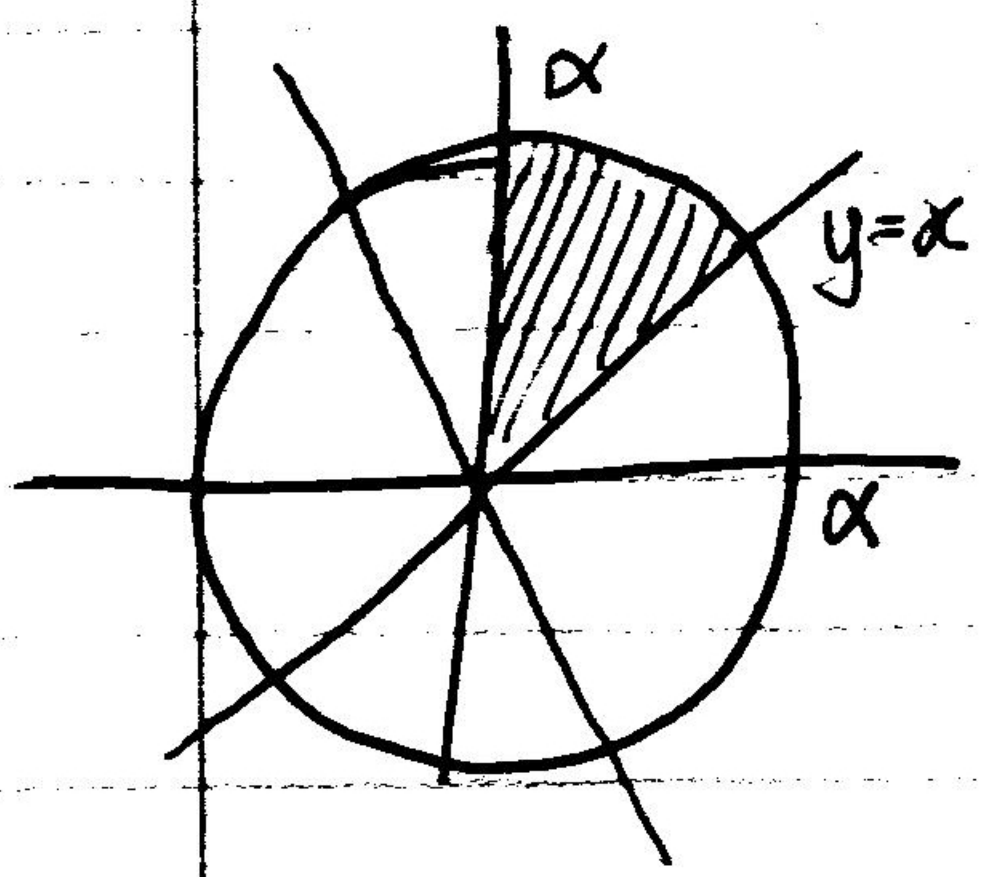
$$M_x=\int_0^{\pi}\int_0^{\alpha} r\sin\theta\,\lambda r\, r\, dr\, d\theta=\lambda\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{\alpha} r^3\, dr$$

$$=\frac{2\lambda\alpha^4}{4}.$$

$$M_y = \int_0^{\pi}\int_0^{\alpha} r\cos\theta\,\lambda r\, r\,dr\,d\theta = \lambda \cancel{\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta}^{\,0}\int_0^{\alpha} r^3\,dr = 0$$

, οπότε $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{3\alpha}{2\pi}$, $\bar{y} = \frac{M_y}{m} = 0$

Να βρεθεί το κεντροειδές (σταθερή πυκνότητα) ενός κομματιού πίτσα. (πίτσα 8 κομματιών)



$m = \iint \rho\,dA = \rho\iint dA = \rho\,\frac{\pi\alpha^2}{8}$ μ.μ

μιας και το εμβαδόν του κάθε κομματιού ισούται με το $\frac{1}{8}$ του συνολικού εμβαδού του κύκλου.

$$M_x = \iint y\rho\,dA = \rho\iint y\,dA \xlongequal[\text{συν/νες}]{\text{πολικές}} \rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\alpha} r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\alpha} r^2\,dr = \rho\left(-\cos\theta\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{\alpha}$$

$$= \rho\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\alpha^3}{3} = \rho\,\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6}$$

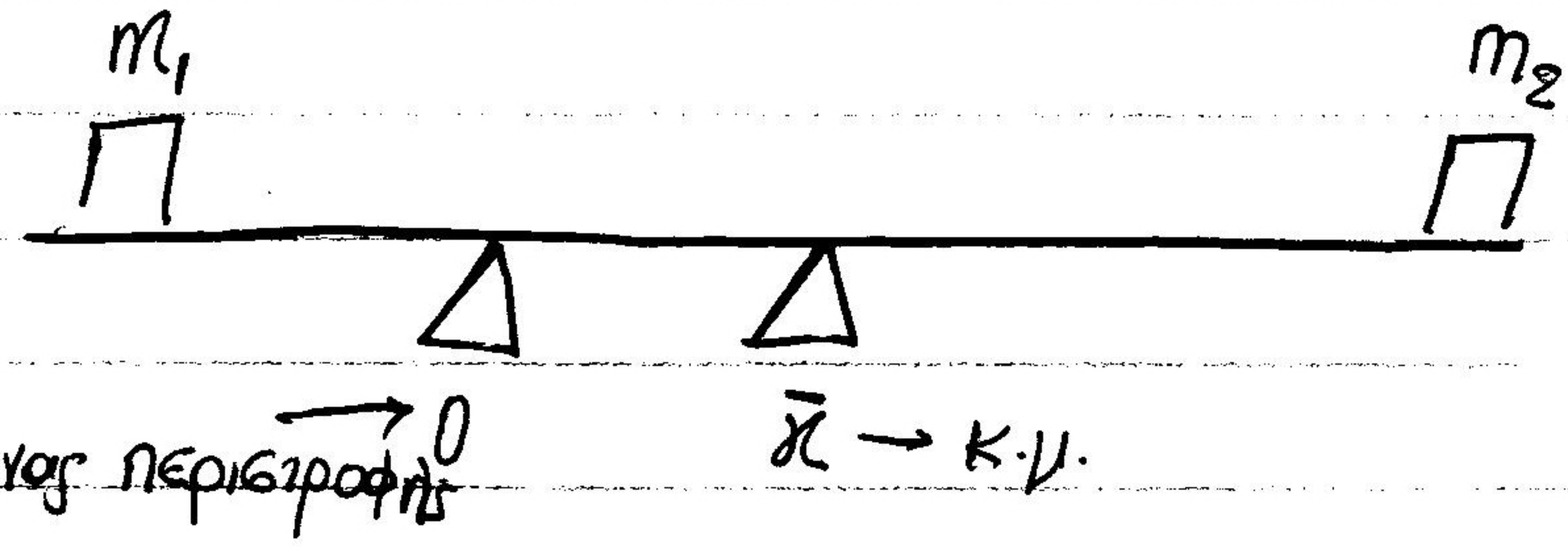
$$M_y = \iint x\rho\,dA = \rho\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\int_0^{\alpha} r^2\,dr = \rho(\sin\theta)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{\alpha}$$

$= \rho\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\alpha^3}{3} = \rho\,\frac{\alpha^3(2-\sqrt{2})}{6}$, οπότε:

$\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\alpha$, $\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{8\alpha}{6\pi}(2-\sqrt{2})$.

• Ροπές Αδράνειας ή Δεύτερες Ροπές συστήματος.

Οι ροπές που ορίσαμε ως τώρα, δίνουν πληροφορία για το κέντρο μάζας ενός σώματος, δηλαδή το σημείο ισορροπίας του. Εξετάζουμε τώρα τι συμβαίνει όταν το σώμα δεν ισορροπεί.



Αν το υπομόχλιο ΔΕΝ είναι στη θέση ισορροπίας, τότε η τραμπάλα περιστρέφεται.

Μας ενδιαφέρουν τα εξής: (α) Πόση ενέργεια δαπανάται για την περιστροφή; (β) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ενέργεια αυτή;

Η στοιχειώδης μάζα Δm απέχει από τον άξονα περιστροφής O, απόσταση r_i.

Ορίζω: Γωνιακή Ταχύτητα: $\omega = \frac{d\theta}{dt} := \dot{\theta}$

Κανονική Ταχύτητα: $v = \frac{ds}{dt}$, s τόξο περιστροφής.

Είναι $s = r_i \theta \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} = \omega r_i$, με:

$E_i = \frac{1}{2} \Delta m \, v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \, \omega^2 r_i^2$, με $\Delta m = \rho \Delta A$.

Αθροίζοντας, έχω: $E = \int \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_{I \,=\, \text{ροπή αδράνειας}}$

$= \frac{1}{2} I \omega^2$.